OVERLEVINGSTAFELS en VERZEKEREN
Werkblad – Getallen bij leven en dood

Vooraf – De vragen en opdrachten in dit werkblad die vooraf gegaan worden door • of een letter (**a**, **b**, …), dienen *schriftelijk* te worden beantwoord.
Daarbij moet altijd duidelijk zijn 'hoe' de antwoorden gevonden zijn. Het geven van *alleen* een antwoord als 'ja' of '365' is dus *niet* voldoende.
Sommige opgaven kunnen met behulp van 'Lijsten' met een grafische rekenmachine worden opgelost. Het is dan toch noodzakelijk schematisch de resultaten schriftelijk weer te geven. Van de manier waarop daarbij de rekenmachine is gebruikt, behoeft dan *geen* verslag te worden gedaan.

Studielast
: 12 à 17 slu

Voorkennis
: rekenen met procenten / samengestelde interest / formulevaardigheid / rekenen met kansen (een korte inleiding *kansrekening* is opgenomen als *intermezzo*) / machtsfuncties / exponentiële functies

Benodigdheden
: zakrekenmachine of grafische rekenmachine / eventueel spreadsheet programma / Mannentafel'95 (dit is een *bijlage* bij dit werkblad)

Overlevingstafel – *In figuur 1a en 1b* staan twee delen van een **overlevingstafel.** Zo'n tafel (tabel) wordt samengesteld door het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) uit de bevolkingsgegevens in de Gemeentelijke Basis Administratie (GBA). De tafels worden, na enige bewerking, (onder meer) door verzekeringsmaatschappijen gebruikt om premies voor verzekeringen te berekenen. Deze overlevingstafel, vroeger ook wel *sterftetafel* genoemd, betreft het jaar 1995. Eigenlijk is het een tafel die gebaseerd is op de *gemiddelden* van CBS-tellingen gedurende de jaren 1995-2000.

x	l_x	q_x
0	100000	0.0040800
0.5	99592	0.0017681
1	99416	0.0005029
2	99366	0.0003724
3	99329	0.0002517
4	99304	0.0002115
5	99283	0.0001914
6	99264	0.0001713
7	99247	0.0001411
8	99233	0.0001411
9	99219	0.0001411
10	99205	0.0001310

figuur 1a

x	l_x	q_x
35	97815	0.0009508
36	97722	0.0010131
37	97623	0.0010858
38	97517	0.0011895
39	97401	0.0013244
40	97272	0.0014598
41	97130	0.0016267
42	96972	0.0017737
43	96800	0.0019525
44	96611	0.0021840
45	96400	0.0024170

figuur 1b

De constructie van zo'n tafel (in dit geval voor mannen) verloopt min of meer als volgt (zie de hierna volgende stappen 1, 2 en 3).
Stap 1. Voor elke leeftijd x bereken je, met behulp van gegevens uit het Bevolkingsregister, het zogenoemde **sterftequotiënt** q_x :

$$q_x = \frac{\text{aantal overleden mannen van leeftijd } x \text{ in 1995}}{\textit{totaal aantal} \text{ mannen van leeftijd } x \text{ in 1995}}$$

Opmerking. De x in een overlevingstafel wordt meestal gebruikt voor de leeftijd van een man.

Voorbeeld (bij stap 1) – Je telt het aantal mannen die bij hun overlijden in 1995 40 jaar oud zijn. Noem dit aantal d_{40}.
Je moet er hierbij eigenlijk van uit gaan, dat de sterfgevallen gelijkmatig over het jaar verdeeld zijn. Sommige van deze mannen zijn kort ná hun 40e verjaardag gestorven, en andere vlak vóór hun 41e. De gemiddelde leeftijd van de gestorvenen is daardoor 40,5 jaar.
In dit geval (***zie figuur 1b***) is d_{40} = 142 (= 97272 – 97130).

Je telt ook het *totaal aantal* mannen (in leven én overleden) die op een zekere peildatum in 1995 (meestal wordt daarvoor 1 juli genomen) de leeftijd van 40 jaar hebben (of zouden hebben). Noem dit aantal l_{40}. Hier is l_{40} = 97272 (zie weer ***figuur 1b***).
Ook deze groep heeft natuurlijk een gemiddelde leeftijd van 40,5 jaar. We gebruiken in de tafels (en bij de berekeningen) echter tóch de leeftijdsaanduiding 40.

Dus is (per definitie): $q_{40} = \frac{d_{40}}{l_{40}} \quad (= \frac{142}{97272} = 0{,}0014598)$

Zo kun je voor elke leeftijd x het sterftequotiënt q_x berekenen met:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Opmerking. d_x is dus het *aantal* x-jarige mannen die in hun (x + 1)-e levensjaar overleden zijn. d_{40} is dan het aantal personen dat overleden is ná hun 40e en vóór hun 41e verjaardag.

- Ga na dat door deze manier van tellen geldt: $d_x = l_x - l_{x+1}$.
  (Zie hierboven: $d_{40} = l_{40} - l_{41} = 142$.)

En dus is:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Je kan zo doende d_x berekenen met: $d_x = q_x \cdot l_x$.

In afwijking van wat gebruikelijk is bij overlevingstafels, is ***in figuur 1a*** ook (en alleen als illustratie) een telling uitgevoerd voor jongens die ½ jaar oud zijn.

Stap 2. De gegevens uit de tellingen worden daarna omgerekend voor een aantal pasgeborenen van 100.000 (= l_0).
Het sterftequotiënt van pasgeboren jongens (q_0) is gelijk aan 0,0040800 (zie de 1e regel, 3e kolom ***in figuur 1a***). Dit betekent dat van de 100.000 jongens er 408 bij of kort na de geboorte (d.w.z. *binnen* een half jaar) overleden zijn.
Er beginnen dus 99.592 jongens aan de *tweede helft* van hun *eerste levensjaar* (zie de 2e regel, 2e kolom).

Stap 3. Het sterftequotiënt van jongens van ½ jaar oud is gelijk aan $q_{0.5}$ = 0,0017681 (zie de 2e regel, 3e kolom ***in figuur 1a***). Dit houdt dus in dat van de 100.000 jongens er 176,81 = 177 zullen overlijden.
Van de 99.592 nog levende jongens die ½ jaar oud zijn, zullen er dus 0,0017681 × 99592 = 176 overlijden vóór hun eerste verjaardag.

Aan hun *tweede* levensjaar beginnen dus l_1 = 99592 – 176 = 99416 jongens (zie de 3e regel, 2e kolom ***in figuur 1a***).

Intermezzo: wat kansrekening – We spreken in het dagelijks leven vaak over 'de *kans* dat iets (wel of niet) zal gebeuren':

- de kans dat je met een dobbelsteen (bij één keer werpen) geen 'vier' gooit;
- de kans dat je met een dobbelsteen 2 keer achter elkaar een 'zes' gooit;
- de kans op het winnen van de hoofdprijs in een loterij;
- de kans dat het morgenochtend (niet) zal regenen;
- de kans op nachtvorst;
- de kans op de geboorte van een meisje;
- de kans dat je met een geldstuk geen 'kop' gooit;
- …

De *theoretische* **kans** P op een bepaalde gebeurtenis G wordt in de wiskunde meestal gedefinieerd als:

$$P(G) = \frac{aantal\ \ gunstige\ mogelijkheden}{totaal\ \ aantal\ \ mogelijkheden}$$

Met 'gunstig' wordt hierbij bedoeld: in overeenstemming met de gebeurtenis.
Maar, het is vaak zo dat de theoretische kans op een bepaalde gebeurtenis niet gemakkelijk (of zelfs helemaal niet) kan worden berekend.

Voorbeelden

- Bij het werpen met een dobbelsteen zijn er in totaal 6 mogelijkheden (uitkomsten): een 1, 2, 3, 4, 5 of een 6.
'Geen vier' gooien betekent het gooien van een 1, of een 2, een 3, een 5 of een 6. Dus zijn er 5 'gunstige' mogelijkheden om 'geen vier' te gooien. Per definitie is dan:
$P(\text{geen } 4) = \frac{5}{6}$

- Werp je twee keer met een dobbelsteen, dan zijn er in totaal 36 mogelijkheden: de eerste keer 6 én de tweede keer 6. Nee, géén 12 = 6 + 6, maar 6 × 6 = 36 in totaal! Ga dat na!
Slechts één van die mogelijkheden is '6 gevolgd door 6'. Zodat:
$P(6 \text{ gevolgd door } 6) = \frac{1}{36}$

Opmerking. Het 2 keer (na elkaar) werpen met één dobbelsteen heeft in het algemeen hetzelfde 'effect' als één keer werpen met 2 dobbelstenen.

- De kans op het winnen van de hoofdprijs in een loterij kan je meestal direct berekenen met behulp van de kansdefinitie:
$P(\text{hoofdprijs loterij}) = \frac{1}{aantal\ verkochte\ loten}$

- De 'kans op regen' laat zich theoretisch niet uitrekenen. In plaats daarvan zou je een *statistische methode* kunnen gebruiken. Je bekijkt dan gedurende een bepaalde periode het verschijnsel (de gebeurtenis) 'het regent 's morgens'. Je telt dan het aantal 'gunstige' waarnemingen. Stel dat het daarbij van de 300 keer 131 keer 's morgens regent, dan zou je kunnen zeggen dat: $P(\text{morgenochtend regen}) = \frac{131}{300}$.

- De 'kans op nachtvorst' kan je evenmin theoretisch berekenen. Ook daarvoor wordt gebruik gemaakt van een statistische methode.

Opmerking. Overigens is het zo dat weersverschijnselen, zoals regen en nachtvorst, van een groot aantal factoren afhankelijk zijn. Daardoor kunnen de kansen van dag tot dag, en natuurlijk ook van plaats tot plaats, grote verschillen vertonen.

- De *theoretische* kans op de geboorte van een meisje is gelijk aan ½. Immers, er zijn twee mogelijkheden (J of M). Op het moment dat een eicel bevrucht wordt door een zaadcel, ligt het genetisch materiaal vast, dus ook het geslacht van de baby. Eigenlijk bepaalt de mannelijke partner of de baby een jongetje of een meisje wordt. Een eicel geeft namelijk altijd het X-chromosoom door. Een zaadcel kan óf het X- óf het Y-chromosoom bevatten. Als de zaadcel het X-chromosoom bevat, wordt de baby een meisje; bevat de zaadcel het Y-chromosoom, dan wordt het een jongetje.
Uit geboortestatistieken (in de praktijk dus) blijkt dat de kans op J of M *niet* gelijk is aan ½. Zo werden er in 2009 in Nederland 184.915 kinderen geboren, waarvan 94.619 jongens en 90.296 meisjes. In dit geval is dan:
$P(\text{meisje}) = \frac{90296}{184915} \approx 0{,}488$ en $P(\text{jongen}) \approx 0{,}512$

- De kans dat je met een (zuiver) geldstuk 'geen kop' gooit, is natuurlijk gelijk aan de kans dat je 'munt' gooit (de kans dat het geldstuk ook op z'n kant kan blijven staan, wordt gelijk gesteld aan 0: niet mogelijk).
Omdat er totaal slechts 2 mogelijkheden zijn (K en M), is:
$P(\text{kop}) = \frac{1}{2}$ en $P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$

Rekenregels – Bij het rekenen met kansen zijn er enkele belangrijke rekenregels. Allereerst de zogenoemde **complementregel**, die betrekking heeft op het *ontkennen* van het plaats vinden van een gebeurtenis, zoals '*geen* vier gooien' of '*geen* nachtvorst'.
Geven we de 'ontkenning' van het plaatsvinden van een gebeurtenis G aan met $\neg G$ (spreek uit als: 'niet G'), dan is:

(C)… $P(\neg G) = 1 - P(G)$

Voorbeeld. Is G de gebeurtenis 'het gooien van 4 met een dobbelsteen', dan is:
$P(\neg G) = P(\text{geen } 4) = 1 - P(4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
Kijk ook nog eens naar het eerste kansvoorbeeld hierboven.

Een tweede belangrijke regel is de **somregel** van twee gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar *uitsluiten*:

(S_1)… $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$

We 'verbinden' beide gebeurtenissen dus met het woordje 'of'.
Opmerking. Zie ook Opmerking 2 die staat na de behandeling van de productregel.

Voorbeeld. Is G_1 de gebeurtenis 'het gooien van 4 met een dobbelsteen' en G_2 de gebeurtenis 'het gooien van 5 met een dobbelsteen', dan is (omdat G_1 en G_2 elkaar uitsluiten):
$P(G_1 \text{ of } G_2) = P(4 \text{ of } 5) = P(4) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
Natuurlijk kan deze kans ook berekend worden met de definitie. Immers, 'gunstig' zijn in dit geval de worpen 4 en 5; dat zijn er 2. En in totaal zijn er 6, zodat:
$P(4 \text{ of } 5) = \frac{2}{6}$

En verder is er ook nog (en zeker niet onbelangrijk) de **productregel**. Deze regel wordt vooral gebruikt bij het berekenen van kansen op gebeurtenissen G_1 en G_2 die *na elkaar* plaatsvinden:

(V)… $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$

Beide gebeurtenissen worden verbonden met het woordje 'en', dat je hier het best kunt uitspreken als 'en vervolgens (ook)'.

Voorbeeld. G_1 is de gebeurtenis 'het gooien van 4 met een dobbelsteen' en G_2 de gebeurtenis 'het gooien van 5 met een dobbelsteen'.
Werpen we nu *twee* keer, dan geldt:
$P(4 \text{ gevolgd door } 5) = P(4 \text{ en } 5) = P(4) \cdot P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Opmerking 1. Wanneer je met twee dobbelstenen werpt en als *eindresultaat* een 4 én een 5 wilt hebben (je let dan dus *niet* op de volgorde), dan moet je je realiseren dat een dergelijk resultaat op *twee* manieren kan worden gevonden: 'eerst een 4 en *dan* een 5' óf 'eerst een 5 en *dan* een 4'. Je hebt dus te maken met de gebeurtenissen '4–5' en '5–4'. Dan is, volgens de somregel:
$P(4\text{–}5 \text{ of } 5\text{–}4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

Opmerking 2. De somregel voor gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar *niet uitsluiten* (zie ook S_1 hierboven), luidt:

(S_2)… $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \text{ en } G_2)$

Voor gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar *uitsluiten*, is dus $P(G_1 \text{ en } G_2) = 0$.

Opgave K1

Bij een zeker statistisch onderzoek is gebleken dat de kans op de gebeurtenis G_1 gelijk is aan 0,7654. De kans dat de gebeurtenis G_2 *niet* plaats vindt is gelijk aan 0,0123.

- Bereken $P(G_1 \text{ en } G_2)$ in 4 decimalen. Geef bij je antwoord aan welke rekenregels (C, S_1, S_2, V) je hebt toegepast.

Opgave K2

Je werpt met twee dobbelstenen. G is de gebeurtenis 'de som van de ogen is gelijk aan 8'.
Opmerking. Het werpen met 2 dobbelstenen heeft in het algemeen hetzelfde 'effect' als twee keer (na elkaar) werpen met 1 dobbelsteen.

a. Ga na dat G opgebouwd gedacht kan worden uit 5 (of, zo je wilt, ook uit 3) verschillende gebeurtenissen. Beschrijf deze.

b. Toon nu aan dat $P(G) = \frac{5}{36}$.

De gebeurtenis H is 'precies één van beide stenen heeft 3 ogen'.

c. Bereken $P(H)$, $P(G \text{ en } H)$ en ook $P(G \text{ of } H)$.

Vaasmodel – Bij het rekenen met kansen wordt vaak gebruik gemaakt van een zogenoemd *vaasmodel*. Het kansexperiment wordt dan 'vertaald' naar een experiment waarbij uit een vaas die gevuld is met gekleurde ballen, blindelings één of meer ballen moeten worden getrokken. Wordt een bal uit de vaas gehaald, dan kan, na het noteren van het resultaat, besloten worden de bal *terug in de vaas* te doen (experiment ***met teruglegging***), of de bal verder *buiten beschouwing* te laten (experiment ***zonder teruglegging***).

Voorbeeld. In een vaas zitten 1000 ballen, 512 rode (R) en 488 witte (W). Uit de vaas worden na elkaar 3 ballen getrokken, *zonder* teruglegging. Daarbij is dan (volgens de productregel):

$P(3 \text{ keer rood}) = P(3\,\text{R}) = \frac{512}{1000} \cdot \frac{511}{999} \cdot \frac{510}{998} = 0{,}1338$

Immers, voor de eerste rode bal heb je 512 (gunstige) mogelijkheden (van in totaal 1000). Dan zitten er nog 511 rode ballen in de vaas (en totaal 999) en na het trekken van de tweede bal heb je voor de derde rode nog 510 mogelijkheden (en in totaal 998).
Zo is ook:

$P(3\,\text{W}) = \frac{488}{1000} \cdot \frac{487}{999} \cdot \frac{486}{998} = 0{,}1158$

Willen we als resultaat 2 R en 1 W, dan moet je je realiseren dat een dergelijk resultaat op *verschillende* manieren kan worden verkregen, namelijk: R–R–W, R–W–R en W–R–R.
Dus is (volgens de somregel):

$P(\overset{\frown}{2\,\text{R},1\,\text{W}}) = \frac{512}{1000} \cdot \frac{511}{999} \cdot \frac{488}{998} + \frac{512}{1000} \cdot \frac{488}{999} \cdot \frac{511}{998} + \frac{488}{1000} \cdot \frac{512}{999} \cdot \frac{511}{998}$

Het boogje boven 2R, 1W betekent hier dat *niet* de volgorde, maar het uiteindelijke resultaat belangrijk is.
Zoals je ziet is het product van de tellers en de noemers in elk van de termen gelijk, zodat je korter kunt schrijven:

$P(\overset{\frown}{2\,\text{R},1\,\text{W}}) = 3 \cdot \frac{512}{1000} \cdot \frac{511}{999} \cdot \frac{488}{998} = 0{,}3842$

De factor 3 wordt door bepaald door het toepassen van de somregel.
En ook is:

$P(\overset{\frown}{1\,\text{R},2\,\text{W}}) = 3 \cdot \frac{512}{1000} \cdot \frac{488}{999} \cdot \frac{487}{998} = 0{,}3661$

Merk op dat P(3R) + P(3W) + P(2R,1W) + P(1R,2W) = 1 (0,9999 door afronding in de afzonderlijke kansen).

Opgave K3

a. Verklaar waarom in dit voorbeeld geldt dat:
P(3R) + P(3W) + P(2R,1W) + P(1R,2W) = 1

b. Bereken dezelfde kansen als in het voorbeeld, maar nu *met* teruglegging.

c. Bereken in dit laatste geval ook: P(3R) + P(3W) + P(2R,1W) + P(1R,2W).

Opgave K4

In een vaas zitten 6 rode en 6 witte ballen. De ballen van elke kleur zijn genummerd van 1 t/m 6. Er worden *met teruglegging* na elkaar twee ballen getrokken.
Hierbij is gebeurtenis $\underline{G}$: beide ballen hebben *verschillende* kleur, en
gebeurtenis H: beide ballen hebben *hetzelfde* nummer, en
gebeurtenis K: de som van de nummers is gelijk aan 8.

a. Toon aan (of beredeneer) dat $P(G)$ = ½.

b. Bereken ook $P(G$ en $H)$ en $P(G$ en $K)$.

Sterftequotiënt – Ook de sterftequotiënten in een overlevingstafel kunnen worden opgevat als *kansen*. Hieronder wordt dat kort uitgelegd.
Sterftequotiënten worden, zoals je gezien hebt, berekend op grond van een statistische methode: tellen hoeveel mannen (vrouwen) van bijvoorbeeld 40 jaar er zijn op een zekere peildatum (l_{40}) en hoeveel er daarvan, na verloop van één jaar, nog in leven zijn (l_{41}).

Het quotiënt $\frac{l_{41}}{l_{40}}$ is dan op te vatten als de kans op de gebeurtenis G: 'iemand van 40 jaar is na één jaar nog in leven' (deze kans is de 1*-jarige overlevingskans*).

Is bijvoorbeeld l_{40} = 972721 en l_{41} = 97130 (beide tellingen betreffen mannen; ***zie figuur 1b***), dan is: $P(G) = \frac{l_{41}}{l_{40}} = \frac{97130}{97272} = 0{,}9985402$.

$\neg G$ is in dit geval de gebeurtenis dat 'een 40-jarige man na één jaar *niet* meer in leven is'.
Dan is, volgens de complementregel:

$$P(\neg G) = 1 - \frac{l_{41}}{l_{40}} = 1 - 0{,}9985402 = 0{,}0014598$$

Er geldt verder, volgens de definities van d_x en q_x:

$$P(\neg G) = \frac{l_{40} - l_{41}}{l_{40}} = \frac{d_{40}}{l_{40}} = q_{40}$$

In 'woorden': q_{40} is de kans dat 'een 40-jarige man na 1 jaar *niet* meer in leven is' (dit is de 1*-jarige sterftekans van een 40-jarige man*).

Opgave K5

a. Als verder l_{42} = 96972 (zie ook ***figuur 1b***) is, bereken dan de kans dat een 40-jarige man in z'n 42e levensjaar overlijdt.
(Hint: wellicht kan je hierbij de kansen gebruiken van twee opeenvolgende gebeurtenissen.)

b. Is de in **a** berekende kans gelijk aan de kans dat 'een 40-jarige man na 2 jaar is overleden'? Zo ja, verklaar je antwoord. Zo nee, bereken dan die kans.

(*einde Intermezzo*)

Kansen toegepast

> **Overlevingstafels** geven aan hoeveel van 100.000 pasgeborenen jongens, resp. meisjes de leeftijd van 1, 2, 3 jaar, enz. zullen bereiken op basis van de sterfteverhoudingen die bij de bevolking gedurende een bepaalde periode zijn waargenomen.
> Aan de hand van deze gegevens kan tevens voor elk geslacht en elke leeftijd worden berekend hoe groot de kans is op overlijden vóór het bereiken van de volgende leeftijd.

figuur 2

OPGAVE 1

In figuur 2 staat een stukje tekst over overlevingstafels uit een *Statistisch Zakboek*.

a. Leg kort uit dat de daarin gebruikte formulering klopt met de berekeningen die hierboven zijn beschreven voor zo'n tafel.

b. Geef een *formule* voor de kans P dat een man van 25 jaar overlijdt vóór z'n 26e?

c. Geef ook een *formule* voor de kans $\neg P$ dat een 25-jarige man *niet* voor z'n 26e overlijdt.

Nb. Er zijn *verschillende* overlevingstafels voor mannen en vrouwen, omdat de sterftequotiënten voor mannen en vrouwen sterk verschillen.

OPGAVE 2

In figuur 3a staat een stukje van een 'vrouwentafel', eveneens met gegevens uit 1995. De leeftijd van vrouwen wordt aangegeven met een y.

a. Neem deze tabel over en vul daarin de ontbrekende aantallen op de … in.

leeftijd (y)	sterftequotiënt (q_y)	levenden (l_y)	overledenen (d_y)
38	0,0008941	98427	…
39	0,0009966	…	…
40	0,0011197	…	…
41	0,0012330	…	…
42	0,0013672	…	…

figuur 3a

b. Bereken de kans dat een 38-jarige vrouw in haar 41e levensjaar overlijdt.

Van deze vrouwentafel is de hoogste voorkomende leeftijd gelijk aan 111. Het laatste deel van de tafel staat ***in figuur 3b*** hieronder.

y	q_y	l_y	d_y
104	0,4596774	124	…
105	0,4776119	…	…
106	0,4857143	…	…
107	0,5000000	…	…

y	q_y	l_y	d_y
108	0,5555556	…	…
109	0,5000000	…	…
110	0,5000000	…	…
111	…	…	…

figuur 3b

c. Neem ook dit deel van de tabel over en vul (op de …) verder in.

Gebruik bij de hierna volgende opgaven, indien nodig, de **Mannentafel'95**. Deze tafel, waarin voor *alle* leeftijden (van mannen) de waardes van l_x en q_x zijn opgenomen, is als **bijlage** bij dit werkblad gevoegd. Deze tafel (één A4-pagina) is eventueel ook, als pdf-bestand, te downloaden via:
www.nvvw.nl/special12/mannen95.pdf

OPGAVE 3

a. Bereken de kans dat een man van 25 jaar overlijdt vóór z'n 26e.
Bereken ook de kans dat een 25-jarige man *niet* voor z'n 26e overlijdt.

b. *Even zoeken…* Bij welke leeftijd in de Mannentafel'95 is het aantal overleden mannen het grootst?

c. Leg uit waarom bij die leeftijd het sterftequotiënt niet noodzakelijk het grootst behoeft te zijn cq. niet het grootst is.

d. Bereken d_{109}, d_{108}, d_{107}, d_{106} en d_{105}. Hoeveel is $d_{105} + d_{106} + d_{107} + d_{108} + d_{109}$?

e. Bereken $d_{50} + d_{51} + \ldots + d_{109}$ en doe dat ook met $d_{20} + d_{21} + \ldots + d_{49}$.

OPGAVE 4

a. Bereken de kans dat een man van 50 jaar vóór zijn volgende verjaardag overlijdt?

b. Hoe groot is de kans dat een 50-jarige man *niet* binnen 1 jaar, maar *wel* binnen 2 jaar overlijdt?

c. Bereken de kans dat een 50-jarige man binnen 9 jaar overlijdt?

d. Hoe groot is de kans dat een man van 50 jaar *niet* binnen 9 jaar, maar *wel* binnen 10 jaar overlijdt?

Actuariële wiskunde – In 1671 bood raadpensionaris (overigens ook uitstekend wiskundige) Johan de Witt (1625-1672) aan de Staten van Holland, die geld wilden lenen van de burgers, een rapport aan waarin voor het eerst de wiskunde werd toegepast bij de levensverzekering. In dat rapport, *Waerdye Van Lijf-rente Naer proportie van Los-renten*, ging hij uit van een rentevoet van 4% en van geschatte, maar redelijk betrouwbare sterftekansen van de bevolking.

Een *losrente* is de rente op een lening die samen met een deel van de aflossing wordt betaald totdat de lening geheel is afgelost. De Staten maakten hiervan tot dan toe vaak gebruik.
Een *lijfrente* is (alleen) de rente die op een lening wordt betaald tot het overlijden van de 'lijfrentenier'.
De Witt toonde in zijn rapport aan dat het betalen van lijfrentes voor de Staten voordeliger was dan het betalen van losrentes.

Een verzekeringsmaatschappij kan met de te ontvangen premies precies uitkomen (onder meer) als de gebruikte overlevingstafels een betrouwbaar beeld geven van de toekomst: hoeveel verzekerden er in een bepaald jaar zullen overlijden, en hoeveel er zullen blijven leven.
Wiskunde die gebruikt wordt bij verzekeringen, wordt ***actuariële wiskunde***, ook wel *verzekeringswiskunde*, genoemd.

OPGAVE 5

Duizend 50-jarige mannen hebben het plan een beleggingsclub (de 1000-Club) op te richten. Voordat ze het plan realiseren, voeren ze enkele berekeningen uit.

a. Allereerst: hoeveel van deze mannen zullen, naar verwachting, één jaar later nog in leven zijn?

Als iedere man uit de 1000-Club een bedrag van € 99,60 in de clubkas stopt (dus voorlopig niet belegt), dan kunnen degenen die 51 jaar worden, een bedrag van € 100,00 terugontvangen, mits de sterfte onder deze mannen *precies zo* plaats vindt als 'voorspeld' (in de Mannentafel'95).

b. Controleer dit met een berekening en geef een korte toelichting

Als ze het geld op een, niet met name te noemen, spaarbank zouden zetten, levert dat een jaarlijkse rente op van 4,8%.

c. Hoeveel moeten deze duizend mannen in dit geval storten opdat degenen die (zoals 'voorspeld') de leeftijd van 51 jaar bereiken, precies één jaar later, ieder € 100,00 terug kunnen ontvangen? Licht je antwoord voldoende toe.

OPGAVE 6

De leden van de 1000-Club (ze zijn allen nog 50 jaar) sluiten ieder eenzelfde levensverzekering af, waarbij is bepaald dat een verzekerde die na 5 jaar (d.w.z. aan het einde van het 5e verzekeringsjaar) nog in leven is, een bepaald bedrag krijgt uitgekeerd. Komt de verzekerde eerder te overlijden, dan wordt *niets* uitgekeerd.
Ieder lid stort jaarlijks een bedrag van 200 euro (in verzekeringstermen heet zo'n jaarlijkse storting een **premie**). De **rekenrente** van de verzekeraar is 5%.
Met de rekenrente worden de betaalde premies door de verzekeraar verhoogd (de verzekeraar treedt op als een spaarbank). Die verhoogde premies (de opbrengst) worden dan aan het einde van de verzekering (dus na 5 jaar) gebruikt als uitkering.
Met behulp van een tabel (***zie figuur 4***) kun je uitrekenen welk bedrag elk van de nog levende mannen van de club na 5 jaar uitgekeerd krijgt.

Nb. Premies worden altijd *aan het begin* van een verzekeringsjaar betaald.

kolom 1	kolom 2	kolom 3	kolom 4	kolom 5	
leeftijd x	**aantal mannen**	**q_x**	**premies (totaal)**	**opbrengst na 5 jaar**	
50	1000	0,0039600	200.000	255.256,31	
51	996	0,0043632	199.200	242.128,85	
52	992	0,0048079	…	…	
53	…	0,0053494	…	…	
54	…	0,0059293	…	…	+
55	…			…	= totaal

figuur 4

Opmerking. De premies in kolom 4 zijn opvolgend gedurende 5, 4, 3, 2 en 1 jaar rentegevend.

a. Neem bovenstaande tabel over en vul in kolom 2 met 'aantal mannen' op de … de ontbrekende getallen in met behulp van de gegevens uit de Mannentafel'95 (rond daarbij 'normaal' af).

b. Met welke getallen moeten de bedragen in kolom 4 vermenigvuldigd om de bedragen in kolom 5 te krijgen? Licht je antwoord kort toe.
(Hint: er is hier sprake van *samengestelde interest.*)

Natuurlijk heb je gezien dat de in vraag **b** bedoelde getallen machten zijn van een bepaald getal.

c. Welk getal is dat?

d. Vul de tabel verder in.

e. Welk bedrag is na 5 jaar beschikbaar voor uitbetaling aan de leden van de Club?

f. Bereken het bedrag dat ieder van de dán nog levende leden van de Club uitgekeerd krijgt (in centen nauwkeurig).

De **contante waarde** C van een (toekomstig) bedrag U, over een tijdsperiode van n jaar en bij een rentevoet $100i$ %, is het bedrag dat uitgezet tegen *samengestelde interest* bij de genoemde rentevoet na de periode van n jaren juist het bedrag U oplevert. In formule:

$$U = (1+i)^n \cdot C \quad \text{of:} \quad C = \frac{U}{(1+i)^n}$$

Het berekenen van een contante waarde heet *disconteren*.
Het bedrag U wordt ook wel de **slotwaarde** van het bedrag C genoemd.
De bedragen in kolom 4 ***van figuur 4*** zijn dus de *contante waardes* van de bedragen in kolom 5.
En omgekeerd, de bedragen in kolom 5 zijn de *slotwaardes* van de bedragen in kolom 4.

Opmerking. Verzekeringmaatschappijen brengen bij het vaststellen van de premies van verzekeringen ook *kosten* in rekening (ten behoeve van de bedrijfsvoering: provisie, personeelskosten, gebouwen, ed.).
We houden daarmee in hetgeen volgt *geen* rekening; we stellen de kosten op 0.

OPGAVE 7

Je kunt Opgave 6 ook maken als je uitgaat van de aantallen l_x in de Mannentafel'95, én daarbij (bijvoorbeeld) uitgaat van een jaarlijkse premie (de **jaarpremie**) van 1 euro van elke man. Ook nu is de rekenrente die de verzekeraar hanteert, gelijk aan 5%.

kolom 1	kolom 2	kolom 3	
x	l_x	**totaal na 5 jaar**	
50	94986	121.228,88	
51	94610	…	
52	94197	…	
53	93744	…	
54	93242	…	+
		…	= totaal

$l_{55} = 92690$

figuur 5

a. In kolom 2 staat in dit geval natuurlijk ook het totaal van de te betalen jaarpremies. Neem de tabel van over ***figuur 5*** en vul deze verder in.

b. Bereken ook het bedrag (in centen nauwkeurig) dat aan iedere verzekerde wordt uitgekeerd aan het einde van de verzekering.

c. Wat is het verband tussen dit bedrag (het antwoord op vraag **b**) en de uitkering per verzekerde bij Opgave 6, vraag **f** ?

Het bedrag dat je bij vraag **b** gevonden hebt, is de *uitkering per betaalde euro* voor deze verzekering.

Intermezzo: actuariëel bekeken – Wat je in Opgave 7 hebt gedaan is het volgende.
Het totaal dat staat op de laatste regel in kolom 3, heb je (als het goed gegaan is!) berekend met de formule (ga dat na!):

$$\text{totaal} = l_{50} \cdot 1{,}05^5 + l_{51} \cdot 1{,}05^4 + l_{52} \cdot 1{,}05^3 + l_{53} \cdot 1{,}05^2 + l_{54} \cdot 1{,}05^1$$

Dit totaal is de **slotwaarde van de betaalde premies**; we geven die waarde hier aan met S_P.
Daarna heb je S_P gedeeld door l_{55}, en je vond daarmee de uitkering U (per verzekerde). Dus:

$$U = \frac{S_P}{l_{55}}, \text{ of ook: } S_P = l_{55} \cdot U$$

Het bedrag $l_{55} \cdot U = S_U$ is de **slotwaarde van de uitkeringen**. Zodat we hebben gevonden:

$$S_P = S_U$$

of in woorden: *de slotwaarde van de premies* (S_P) *is gelijk aan de slotwaarde van de uitkeringen* (S_U).
In de actuariële wiskunde is dit het zogenoemde **equivalentieprincipe**.
(*einde Intermezzo*)

We kunnen het probleem van Opgave 7 ook op een andere manier bekijken (en die manier is iets eenvoudiger).

OPGAVE 8

Stel dat er weer l_{50} personen zijn die eenzelfde verzekering als in Opgave 6 willen sluiten, maar nu heeft elke verzekering een uitkering die gelijk is aan U.
Deze personen willen echter door het betalen van *een bedrag ineens* af zijn van het betalen van jaarpremies. Het bedrag dat ze dan ieder bij het sluiten van de verzekering moeten betalen, heet **koopsom**. We geven de te betalen koopsom aan met de letter K.
Het bedrag dat de verzekeraar nu ontvangt, is gelijk aan $l_{50} \cdot K$.
En dit bedrag wordt natuurlijk door de verzekeraar rentegevend gemaakt (weer met 5% rente).

Opmerking. Bij het vaststellen van de koopsom voor een verzekering brengt een verzekeraar eveneens kosten in rekening. We stellen die kosten ook hier gelijk aan 0.

a. Hoe groot is dan de slotwaarde S_K van de betaalde koopsommen?

b. Hoe groot is het bedrag dat door de verzekeraar moet worden uitgekeerd worden aan het einde van de verzekeringen?

Ook in dit geval geldt natuurlijk het equivalentieprincipe.

c. Stel op basis van dit principe een vergelijking op.

Je kunt de koopsom K van deze verzekering dan berekenen uit:

$$K = \frac{l_{55}}{l_{50}} \cdot \frac{U}{1{,}05^5}$$

d. Ga na of deze formule met de door jou in vraag **c** opgestelde vergelijking in overeenstemming is.

Voorbeeld – Een 30-jarige man wil een verzekering afsluiten waarbij hij € 1100,00 krijgt uitgekeerd als hij 40 jaar wordt. Overlijdt hij eerder, dan wordt niets uitgekeerd. Uiteraard is deze man geïnteresseerd in de grootte van de koopsom van deze verzekering.

- Als l_{30} personen deze verzekering sluiten, hoeveel van die personen zijn er dan na 10 jaar nog in leven?
- Hoeveel moet de verzekeraar op dat moment (dus na 10 jaar) uitbetalen?
- Hoeveel moet de verzekeraar per verzekerde ontvangen om die uitbetaling te kunnen doen *zonder* rekening te houden met rentevergoeding?
  (Hint: dat bedrag is minder dan € 1100,00.)

Het bedrag in de laatste vraag wordt wel de *bruto* koopsom, hieronder aangegeven met K^*, genoemd. Dat bedrag is gelijk aan:

$$K^* = \frac{97272}{98206} \times €\,1100{,}00 = €\,1089{,}54$$

- Verklaar deze berekening.

Omdat de verzekeraar contractueel verplicht is rentevergoeding te geven van, dit keer bijvoorbeeld, 4% per jaar (de rekenrente), wordt de *werkelijk te betalen* koopsom K, de *netto* koopsom, bij een verzekeringsduur van 10 jaar:

$$K = \frac{€\,1089{,}54}{1{,}04^{10}} = €\,736{,}05$$

- Waarom wordt er hierbij gedeeld door $1{,}04^{10}$?

Het is gebruikelijk koopsommen in gehele euro's te berekenen ('normaal' afgerond). Dus K is in dit geval gelijk aan € 736,00.

Premiebetaling – Meestal wordt een verzekering niet in één keer (dus via een koopsom) betaald, maar wordt *jaarlijks* premie betaald: de eerste keer bij het afsluiten van de verzekering, de laatste keer één jaar voordat de uitkering plaats vindt (in het voorbeeld hierboven in totaal dus 10 keer). De jaarpremie is meestal een gelijkblijvend bedrag P.
De eerste keer (na 0 jaar, dus bij het afsluiten van de verzekering) moet natuurlijk het bedrag P aan premie worden betaald.
We doen nu alsof óók de tweede premie P (die na één jaar wordt betaald) als koopsom wordt voldaan (d.w.z. *ook* na 0 jaar).
Deze koopsom is de **contante waarde** van de tweede premie en is gelijk aan:

$$K_1 = \frac{98135}{98206} \times \frac{P}{1{,}04^1} = 0{,}9608 \cdot P$$

- Op het leven van hoeveel mensen is deze verzekering gesloten? Hoeveel verzekerden zijn er in het eerste verzekeringsjaar overleden?
- Waarom wordt er bij de berekening van K_1 vermenigvuldigd met 98135? En waarom gedeeld door 98206?

De contante waarde K_2 van de premie P in het tweede jaar is nu:

$$K_2 = \frac{98061}{98206} \times \frac{P}{1{,}04^2} = 0{,}9232 \cdot P$$

Dergelijke formules gelden natuurlijk ook voor de andere contante waardes K_3, K_4, ... van de te betalen jaarpremies.

kolom 1	kolom 2	kolom 3	
jaar = *j*	l_{30+j}	**contante waarde K_j**	
0	98206	1,0000 · *P*	
1	98135	0,9609 · *P*	
2	98061	0,9232 · *P*	
3	97983	0,8870 · *P*	
4	97902	0,8522 · *P*	
5	97815	0,8187 · *P*	
6	97722	0,7864 · *P*	
7	97623	0,7554 · *P*	
8	97517	0,7256 · *P*	
9	97401	0,6968 · *P*	+
		8,4062 · *P*	= totaal

figuur 6

In de tabel ***in figuur 6*** staat per jaar de contante waarde K_j van de jaarpremie P die moeten worden betaald.

- Waarom is $K_0 = 1{,}000 \cdot P$?
- Reken de gegevens in kolom 3 voor K_3 en K_4 na.

Het totaal van de contante waardes in kolom 3 moet nu gelijk zijn aan de hierboven berekende koopsom van € 736,00.

- Waarom is dat zo?

Dus:

$$8{,}4062 \times P = € \, 736{,}00$$

Zodat:

$$P = \frac{€ \, 736{,}00}{8{,}4062} = € \, 87{,}55$$

En daarmee is de, door elk van de verzekerden te betalen, jaarpremie P gelijk aan € 87,55.

OPGAVE 9

Op het leven van een 15-jarige jongen wordt een verzekering afgesloten, waarbij een bedrag U wordt uitgekeerd aan het eind van het jaar waarin hij 20 jaar is geworden (de duur van de verzekering is dus 5 jaar). Er zal *geen* uitkering plaats vinden als de jongen eerder zou komen te overlijden (uiteraard stopt dan ook de premiebetaling).
Er wordt een jaarpremie van € 200,00 betaald (dus jaarlijks, en 5 keer). Ga uit van een rekenrente van 3,5%.

a. Welk bedrag zal er na 5 jaar worden uitgekeerd?

b. Bereken voor de bij vraag **a** gevonden uitkering ook de koopsom van deze verzekering.

c. Welke manier van betalen is voordeliger? En hoeveel scheelt het?

OPGAVE 10

Natuurlijk kan er ook 'gewoon' 5 keer telkens aan het begin van een jaar een bedrag van € 200,00 op een spaarbank worden gezet tegen 3,5% rente.

a. Bereken het bedrag dat na 5 jaar op die spaarbank staat.

b. Verklaar de verschillen tussen dit bedrag en de bedragen die je hebt berekend in Opgave 9.

OPGAVE 11

De kans dat iemand na vijf jaar nog in leven is, is de 5-*jarige overlevingskans*.

- Bereken de 5-jarige overlevingskans van een 15-jarige jongen.

Lijfrente – Het komt vaak voor dat de uitkering bij leven van de verzekerde niet in één keer wordt gedaan, maar dat gedurende een aantal opeenvolgende jaren (of zelfs levenslang, zoals bij een *pensioen*) een bedrag wordt uitgekeerd, eventueel ook pas dán als er een aantal jaren verstreken is (zoals bij een *pensioenverzekering*). Men spreekt bij dit type verzekering van een **lijfrente** (in het laatste geval is dat een *uitgestelde* lijfrente). Lijfrentes worden uitgekeerd tot en met het jaar waarin de verzekerde is overleden, of tot het einde van de verzekering.

OPGAVE 12

De vader van een 12-jarige jongen wil een *uitgestelde* lijfrente (noem het een *studiekostenverzekering*) afsluiten: zijn zoon moet als hij 18, 19, …, 22 is geworden, elke keer een bedrag van € 1000,00 ontvangen; het is een uitkering bij leven. Overlijdt de jongen onverhoopt, dan wordt de verzekering zonder (verdere) uitbetaling beëindigd.

Opmerking. Hier is sprake van een uitgestelde *tijdelijke* lijfrente.

Gevraagd (en de berekening gaat in stappen): de koopsom K van deze verzekering, bij een rekenrente van 3,5%.

a. Ga na dat de verzekering eigenlijk bestaat uit 5 dezelfde verzekeringen (zoals hierboven behandeld), echter met verschillende verzekeringsduren: 6, 7, 8, 9 en 10 jaar.

De koopsom K kan dus gevonden worden met:

$$K = K_6 + K_7 + K_8 + K_9 + K_{10}$$

waarin K_n de koopsom is van zo'n 'samenstellende' verzekering; daarbij staat de index n voor de duur van de verzekering.

We zullen eerst voor de verzekering met duur $n = 6$ de *contante waarde* van de uitkering berekenen, waarbij we ervan uitgaan dat de verzekering wordt gesloten door l_{12} (= 99178) verzekerden.

De verzekeraar ontvangt dan bij het sluiten van de verzekering een bedrag van: $l_{12} \cdot K$.

b. Hoeveel van de l_{12} verzekerden zijn er na 6 jaar nog in leven?
(Hint: $l_{??} = \ldots$.)
Hoeveel moet er dán (dus na 6 jaar) worden uitgekeerd?

c. Hoeveel verzekerden hebben de koopsom voor de verzekering K_6 betaald?

Ook in Opgave 8 (vraag **c**) heb je al eens een berekening als onderstaand gemaakt!

d. Ga na dat geldt: $l_{12} \cdot K_6 = l_{18} \cdot \dfrac{1000}{(1{,}035)^6}$. Geef nog eens een korte verklaring van deze formule.

e. Bereken K_6 *in centen* nauwkeurig.

f. Bereken op deze manier ook $K_7, \ldots, K_{10}$.

g. Bereken nu K (afgrond op gehele euro's).

Het bedrag $l_{12} \cdot K$ is de contante waarde van de 'betalingen'. We geven die contante waarde aan met C_P .

Ook de *contante waarde van de uitkeringen*, aangegeven met C_U, kan in een (wat langere) formule worden gevat.

h. Geef zo'n formule (dus iets als $C_U = \ldots$).

i. Welke relatie tussen C_P en C_U geldt volgens het equivalentieprincipe?

OPGAVE 13

a. Bereken voor een 40-jarige man de koopsom K van een *tijdelijk* (aanvullend) pensioen van € 7.200,00 welk bedrag telkens wordt uitgekeerd aan het einde van diens 65e tot en met 69e levensjaar. De rekenrente van de verzekeraar is hier weer 3,5%.

Het berekenen van de koopsom van een *levenslang* pensioen voor deze man gaat natuurlijk op dezelfde manier. 'Met de hand' (met daarin soms ook een zakrekenmachine) is het echter een nogal tijdrovende berekening.

b. Verklaar waarom zo'n berekening tijdrovend is.

c. *Facultatief* (maar wellicht toch een uitdaging?): Bereken de koopsom voor deze levenslange verzekering.

Overlijdensrisico – De verzekering die *alleen* een uitkering geeft *bij overlijden* van de verzekerde (een levenslange vorm van dit type verzekering wordt wel *begrafenisverzekering* genoemd), is de oudst bekende verzekeringsvorm.

Een *tijdelijke* vorm hiervan wordt ook wel gesloten om onverwachte financiële risico's bij het overlijden van een persoon (enigszins) te compenseren.

OPGAVE 14

Iemand sluit op het leven van zijn compagnon, en dat is een 40-jarige man, een tijdelijke overlijdensverzekering met een duur van 5 jaar. Aan het einde van het jaar waarin de compagnon overlijdt (binnen 5 jaar), wordt een bedrag van € 50.000,00 uitgekeerd. De verzekering (met een rekenrente van 3,5%) gaat onmiddellijk in. Is de compagnon na het 5e verzekeringsjaar nog in leven, dan vervalt de verzekering.

a. Ga ervan uit dat l_{40} (= 97272) personen deze verzekering sluiten. Hoeveel van deze personen zijn gedurende het 1e verzekeringsjaar overleden? Hoeveel moet er dan – aan het eind van dat jaar – worden uitbetaald?

b. Bereken de contante waarde van deze uitkering.

Voor de rest van de berekening kun je de tabel ***van figuur 7*** gebruiken. Daarin is handiger (met wat kleinere getallen) te rekenen als je een uitkering van € 1000,00 gebruikt.

Hierbij herhalen we (wellicht ten overvloede) dat $d_x = l_x - l_{x+1}$ het aantal overledenen is die de leeftijd van x jaar hebben bereikt. Ze overlijden dus ná hun x-de en vóór hun $(x + 1)$-de verjaardag.

kolom 1	kolom 2	kolom 3	kolom 4	kolom 5	
leeftijd (x)	l_x	**van wie overleden, telkens na 1 jaar**	**uitkering (× 1000)**	**contante waarde**	
40	97272	142	142.000	137.198,07	regel 1
41	97130	158	…	…	regel 2
42	96972	…	…	…	regel 3
43	…	…	…	…	regel 4
44	…	…	…	…	+ regel 5
45	…			…	**= totaal**

figuur 7

c. Neem de tabel over en vul de ontbrekende gegevens (op de …) in.

d. Bereken de koopsom voor een uitkering van € 1000,00 (afgerond op gehele euro's).

e. Hoe groot is de koopsom voor de gewenste verzekering?

Gemengde verzekering – Hierboven, namelijk in Opgave 14, is een verzekering besproken op het leven van een 40-jarige man, waarbij de uitkering *alleen* zou plaats vinden *bij overlijden* van de verzekerde binnen 5 jaar.
In Opgave 8 bekeken we een verzekering op een 50-jarige man waarbij de uitkering *alleen* zou plaats vinden *bij in leven zijn* van de verzekerde na 5 jaar.

We zetten de berekening van die koopsommen, die we nu opvolgend aangeven met O en L, nog even in formules, beide overeenkomstig het equivalentieprincipe.
Opgave 14:

$$l_x \cdot O = d_x \cdot \frac{U}{1{,}035^1} + d_{x+1} \cdot \frac{U}{1{,}035^2} + d_{x+2} \cdot \frac{U}{1{,}035^3} + d_{x+3} \cdot \frac{U}{1{,}035^4} + d_{x+4} \cdot \frac{U}{1{,}035^5}$$

Opgave 8:

$$l_x \cdot L = l_{x+5} \cdot \frac{U}{1{,}05^5}$$

- Bekijk deze formules eens goed! Herken je ze?

In deze formules wordt telkens gedeeld door een *macht*. In Opgave 14 is dat een macht van 1,035; in Opgave 8 is dat een macht van 1,05. Daarmee werd in beide gevallen de *contante waarde* van de uitkering(en) berekend.
Omdat dit in de actuariële wiskunde vaak voorkomt, is er een apart teken voor. De *vermenigvuldigings*factor om de contante waarde *n jaar eerder* uit te rekenen heeft hier de vorm:

$$\frac{1}{1{,}035^n} \text{ cq. } \frac{1}{1{,}05^n}$$

Deze factoren zijn verschillend omdat de rekenrente in beide gevallen verschilt.
We geven in hetgeen volgt zo'n factor, de zogenoemde *disconteringsfactor*, aan met het teken $A_{\overline{n|}}$. De disconteringsfactor is dus wiskundig gedefinieerd als:

$$A_{\overline{n|}} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Uiteraard is $A_{\overline{n|}}$ (ook) afhankelijk van de rekenrente i. De disconteringsfactor wordt daarom ook wel geschreven als $A_{\overline{n|}\,p}$ (met p = 100i). We zullen dat echter in hetgeen volgt achterwege laten en bij elk vraagstuk waarbij i een rol speelt, de waarde van i (cq. p) vermelden.

n	$A_{\overline{n}\vert}$ **met p = 3,5**
0	1,0000000
1	0,9661836
2	0,9335107
3	0,9019427
4	0,8714422
5	0,8419732
6	0,8135006
7	0,7859910
8	0,7594116
9	0,7337310
10	0,7089188
11	0,6849457
12	0,6617833
13	0,6394042
14	0,6177818
15	0,5968906

figuur 8

Voorbeeld – Is de rekenrente i van de verzekeraar gelijk aan 3,5%, dan is:

$$i = 3{,}5\% = \frac{3{,}5}{100} = 0{,}035$$

Zodat (bijvoorbeeld voor n = 4):

$$A_{\overline{4}\vert} = A_{\overline{4}\vert\,3{,}5} = \frac{1}{(1+0{,}035)^4} = \frac{1}{(1{,}035)^4} \approx 0{,}8714422$$

In figuur 8 staan wat meer disconteringsfactoren voor p = 3,5.

De disconteringsfactoren worden in de praktijk bijna altijd gebruikt met 7 decimalen.

OPGAVE 15

a. Controleer met je rekenmachine de waardes van $A_{\overline{8}\vert}$ en $A_{\overline{10}\vert}$ in de tabel.

b. Bereken ook het product $A_{\overline{3}\vert} \cdot A_{\overline{4}\vert}$. Aan welke $A_{\overline{n}\vert}$ is dat product gelijk?

Geef daarvoor een verklaring met behulp van bovenstaande definitie van $A_{\overline{n}\vert}$.

Met de disconteringsfactoren krijgen de formules die hierboven staan, een meer algemene gedaante. Let wel, de rekenrente is nu in beide gevallen hetzelfde.

Opgave 14:

(*)… $l_x \cdot O = d_x \cdot A_{\overline{1}\vert} \cdot U + d_{x+1} \cdot A_{\overline{2}\vert} \cdot U + d_{x+2} \cdot A_{\overline{3}\vert} \cdot U + d_{x+3} \cdot A_{\overline{4}\vert} \cdot U + d_{x+4} \cdot A_{\overline{5}\vert} \cdot U$

Merk op dat je in deze formule de factor U eventueel buiten haakjes kunt brengen.

Opgave 8:

(*)… $l_x \cdot L = l_{x+5} \cdot A_{\overline{5}\vert} \cdot U$

OPGAVE 16

De formule hierboven waarin O voorkomt, heeft betrekking op de berekeningen die je hebt uitgevoerd in de tabel ***van figuur 7***.

a. Geef voor *elk* teken (d.w.z. die met een l, d, A en U) dat in deze formule staat, het kolom- en regelnummer van die tabel waarin dat teken bij een berekening gebruikt is.

In beide gevallen kan de koopsom (O of L) worden berekend door te delen door l_x.
De formule met L gaat daardoor over in:

$$L = \frac{l_{x+5}}{l_x} \cdot A_{\overline{5}\vert} \cdot U$$

Het getal $\frac{l_{x+5}}{l_x}$ daarin kan opgevat worden als een *kans*.

b. Breng deze kans onder woorden.
(Hint: dus iets als '*dat getal is de kans van een x-jarige om …*'.)

Als je in de formule met O elke term door l_x deelt, krijgt je:

$$O = \frac{d_x}{l_x} \cdot A_{\overline{1}\vert} \cdot U + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot A_{\overline{2}\vert} \cdot U + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot A_{\overline{3}\vert} \cdot U + \frac{d_{x+3}}{l_x} \cdot A_{\overline{4}\vert} \cdot U + \frac{d_{x+4}}{l_x} \cdot A_{\overline{5}\vert} \cdot U$$

De vijf getallen $\frac{d_{x+k}}{l_x}$ (met k = 0, 1, 2, 3, 4) kunnen eveneens worden opgevat als kansen.

c. Probeer deze kansen (zo mogelijk in één zin) onder woorden te brengen.

Actuarieel intermezzo – In de actuariële wiskunde worden voor veelvoorkomende uitdrukkingen en sommaties speciale 'afkortingen' gebruikt; men noemt die afkortingen *commutatietekens* (ook $A_{\overline{n}|}$ is zo'n commutatieteken).

De uitdrukking voor O in Opgave 14 is ook te schrijven als (nu met de U 'buiten haakjes'):

$$O = \frac{d_x \cdot A_{\overline{1}|} + d_{x+1} \cdot A_{\overline{2}|} + d_{x+2} \cdot A_{\overline{3}|} + d_{x+3} \cdot A_{\overline{4}|} + d_{x+4} \cdot A_{\overline{5}|}}{l_x} \cdot U$$

We kunnen de teller en noemer van de breuk in het rechter lid vermenigvuldigen met $A_{\overline{x}|}$.

Dan is:

$$O = \frac{A_{\overline{x}|} \cdot (d_x \cdot A_{\overline{1}|} + d_{x+1} \cdot A_{\overline{2}|} + d_{x+2} \cdot A_{\overline{3}|} + d_{x+3} \cdot A_{\overline{4}|} + d_{x+4} \cdot A_{\overline{5}|})}{A_{\overline{x}|} \cdot l_x} \cdot U$$

- Waarom is $A_{\overline{x}|} \cdot (d_x \cdot A_{\overline{1}|}) = d_x \cdot A_{\overline{x+1}|}$?

  (Hint: kijk nog eens naar Opgave 15.)

Nu is, na term voor term vermenigvuldigen met de factor $A_{\overline{x}|}$:

$$O = \frac{d_x \cdot A_{\overline{x+1}|} + d_{x+1} \cdot A_{\overline{x+2}|} + d_{x+2} \cdot A_{\overline{x+3}|} + d_{x+3} \cdot A_{\overline{x+4}|} + d_{x+4} \cdot A_{\overline{x+5}|}}{A_{\overline{x}|} \cdot l_x} \cdot U$$

Hierin zien we (in de teller van de breuk) vijf termen waarvan $d_{x+3} \cdot A_{\overline{x+4}|}$ er eentje is.

De uitdrukking $d_x \cdot A_{\overline{x+1}|}$ wordt (*per definitie*) geschreven met het commutatieteken C_x:

$$C_x = A_{\overline{x+1}|} \cdot d_x$$

En dan is: $d_{x+3} \cdot A_{\overline{x+4}|} = C_{x+3}$.

Zo is ook het commutatieteken D_x *gedefinieerd* als:

$$D_x = A_{\overline{x}|} \cdot l_x$$

Met de commutatietekens C_x en D_x is dan:

$$O = \frac{(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4})}{D_x} \cdot U$$

Maar men gaat 'actuarieel' zelfs nog een stukje verder! Voor de 'oneindig' voortlopende som $C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$ bestaat het commutatieteken M_x .

- Ga na dat hiermee: $O = \frac{M_x - M_{x+5}}{D_x} \cdot U$.
- Probeer zelf voor L – zie de formule met (*) direct boven Opgave 16 – een formule te vinden die alleen geschreven is met D_x en U.

(*einde Intermezzo*)

Indien beide zojuist behandelde (verschillende) verzekeringen *tegelijkertijd* op *dezelfde* verzekerde met een *gelijke* verzekeringsduur (én bij dezelfde verzekeraar) worden afgesloten, dan spreekt men van een **gemengde verzekering**. Een gemengde verzekering is dus een ver-

zekering met een uitkering bij overlijden van de verzekerde vóór de einddatum óf met een uitkering bij leven op de einddatum.
De (netto) koopsom K voor zo'n verzekering is dan uiteraard gelijk aan $L + O$.

OPGAVE 17

Gebruik $x = 35$, $n = 5$, $U = €\ 1000{,}00$ en $i = 0{,}035$ bij je berekeningen in deze opgave.
Omdat $i = 0{,}035$ is, kan je de getallen in de tabel ***van figuur 8*** direct gebruiken. En gebruik ook de formules die vlak boven Opgave 16 met (*) zijn aangegeven.

a. Bereken L (in centen nauwkeurig).

b. Bereken O (in centen nauwkeurig).
(Hint: zet je berekening in een schema als staat ***in figuur 9***.)

x	k	l_x	d_x	$\times U$	$A_{\overline{k+1}\rceil}$	contante waarde	
35	0	97815	93	93.000	0,9661836	89.855,07	
36	1	97722	…	…	…	…	
37	2	…	…	…	…	…	
38	3	…	…	…	…	…	
39	4	…	…	…	…	…	+
40	5	…				…	= totaal

figuur 9

c. Bereken ook de koopsom K (in gehele euro's) voor een gemengde verzekering op het leven van een man van x jaar, met een verzekeringsduur van n jaar en een uitkering U.

OPGAVE 18

Gegeven is: $x = 55$, $n = 10$, $U = €\ 20.000{,}00$ en $i = 0{,}035$.

- Bereken de koopsom K voor een gemengde verzekering met deze gegevens.
(Hint: maak een tabel als ***in figuur 9***.)

Van de *gemengde* verzekering bestaat een groot aantal varianten. Zo is er een verzekeringsvorm waarbij een *vaste* uitkering U wordt gedaan bij het in leven zijn van de verzekerde op de einddatum, maar, bij eerder overlijden wordt – in plaats van U – de koopsom K uitgekeerd, die dan *verhoogd* wordt met de rente over K tot en met het jaar van overlijden.

OPGAVE 19

We kiezen bij het rekenen aan deze variant van de gemengde verzekering opnieuw:
$x = 35$, $n = 5$, $U = €\ 1000{,}00$ en $i = 0{,}035$

a. Wat denk je, zal de koopsom K van deze variant hoger of lager zijn dan de koopsom van de 'echte' gemengde verzekering die je hebt berekend in Opgave 17?
Verklaar je antwoord.

Voor het berekenen van K kan je weer uitgaan van l_{35} personen die worden verzekerd. De contante waarde C_P van de betalingen is nu:

$$C_P = l_{35} \cdot K$$

De uitkering bij overlijden na (bijvoorbeeld) 3 jaar is dan:

$$d_{37} \cdot (1{,}035)^3 \cdot K$$

b. Verklaar deze formule.

De contante waarde van die uitkering is dan: $(d_{37} \cdot (1{,}035)^3 \cdot K) \cdot A_{\overline{3}\rceil}$.

Hierin is het product $(1{,}035)^3 \cdot A_{\overline{3}\rceil}$ gelijk aan 1.

c. Waarom is dit laatste het geval? En wat kan je in dit verband nu zeggen over de uitkering bij overlijden op de andere tijdstippen?

Daardoor is bij een verzekeringsduur van 5 jaar de contante waarde C_R van het deel van de uitkeringen bij overlijden:

$$\begin{aligned} C_R &= d_{35}\cdot K + d_{36}\cdot K + d_{37}\cdot K + d_{38}\cdot K + d_{39}\cdot K \\ &= (d_{35}+d_{36}+d_{37}+d_{38}+d_{39})\cdot K \end{aligned}$$

Opmerking. De index R van C_R is de eerste letter van het woord 'restitutie' (en dat betekent 'teruggave'; in dit geval dus *teruggave* van de 'opgerente' betaalde koopsom).

Nu is er over de uitdrukking tussen de haakjes in de formule van C_R hierboven wel wat op te merken.

d. Toon aan dat in het algemeen geldt (zie ook Opgave 3):

$$d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + d_{x+3} + d_{x+4} = l_x - l_{x+5}$$

(Hint: gebruik de definitie van d_x, namelijk: $d_x = l_x - l_{x+1}$.)

Hiermee is C_R korter te schrijven als:

$$C_R = (l_{35} - l_{40})\cdot K$$

Aan de contante waarde C_L van het koopsomdeel dat betrekking heeft op de uitkering bij leven (aan het einde van de verzekering, als de verzekerde in leven is), is in vergelijking met de gemengde verzekering in Opgave 17 (L was daarin de koopsom voor de uitkering bij leven) natuurlijk *niets* veranderd.

e. Geef (nog eens) een korte uitleg van het feit dat: $C_L = l_{35}\cdot L$.

Volgens het equivalentieprincipe is $C_P = C_R + C_L$, of iets anders geschreven (met de kennis die je hierboven hebt opgedaan):

$$l_{35}\cdot K = (l_{35} - l_{40})\cdot K + l_{35}\cdot L$$

f. Leid hieruit af dat: $K = \dfrac{l_{35}}{l_{40}}\cdot L$.

g. Bereken nu ook K (in gehele euro's).

h. Is wat je bij vraag **g** berekend hebt, in overeenstemming met hetgeen je als antwoord hebt gegeven bij vraag **a**?

Een andere variant van de gemengde verzekering (wel veel lijkend op de vorige) is die waarbij een *vast* bedrag U wordt uitgekeerd bij overlijden van de verzekerde vóór de einddatum, of de betaalde koopsom bij in leven zijn op de einddatum, verhoogd met rente ('opgerent') tot die datum.

OPGAVE 20

Kies, voor berekeningen bij deze laatste variant, ook weer:

$x = 35$, $n = 5$, $U = €\ 1000,00$ en $i = 0,035$

a. Wat denk je, zal de koopsom K van *deze* variant hoger of lager zijn dan de koopsom van de 'echte' gemengde verzekering die je hebt berekend in Opgave 17?
Verklaar je antwoord!

b. En hoe zit het, als je K vergelijkt met de in Opgave 19 berekende koopsom?

c. Toon aan dat voor de koopsom K van deze variant geldt:

$$K = \frac{l_{35}}{l_{35} - l_{40}}\cdot O$$

waarin O de koopsom is van de in Opgave 17 bedoelde verzekering (de 'gewone' tijdelijke verzekering bij overlijden).

(Hint: stel weer vergelijkingen op voor C_P (de betaling), C_O en C_R (de uitkeringen), waarbij je uitgaat van l_{35} verzekerden.)

Nb. De C_R bij deze verzekering verschilt van die in Opgave 19!